NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 75, noviembre de 2010, páginas 165–173

Graduación de la dificultad en el Cubo Soma (I)

J. A. Rupérez Padrón y M. García Déniz (Club Matemático[1])

Resumen El Juego de las Diez Manzanas y la solución de Dudeney. El Cubo Soma de Piet Hein: un primer tratamiento con orientaciones metodológicas para su uso, graduando la dificultad de los ejercicios propuestos.

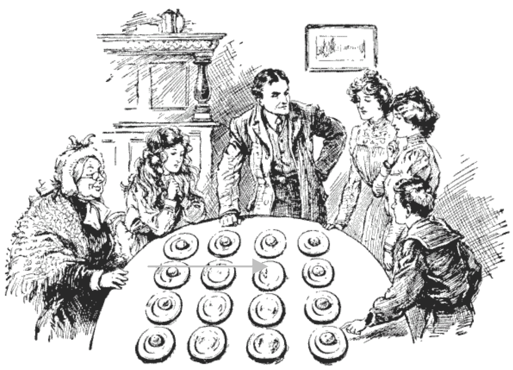
Palabras clave Cubo Soma. Juego de las diez manzanas de Dudeney. Graduación de dificultad en problemas con el cubo Soma.

Abstract Game of the Ten Apples and Dudeney solution. The Piet Hein Soma Cube: an initial treatment with methodological guidelines for use, grading the difficulty of the exercises.

Keywords Soma cube. Game of the ten blocks. Dudeney. Graduation difficulty in trouble with the Soma Cube.

En nuestro artículo anterior dejamos planteado el juego de las Diez Manzanas, original de Henry Dudeney. El juego, una variante de los solitarios cuadrados de saltar y comer, se presenta así:

Las Diez Manzanas



La familia representada en la ilustración se divierten con este pequeño puzzle, que no es muy difícil pero sí muy interesante. Se verá, que han puesto dieciséis platos sobre la mesa, formando un cuadrado, y ponen una manzana en cada uno de diez de esos platos. Quieren encontrar la manera de eliminar todas las manzanas, excepto una, saltando una por encima de la otra hasta el próximo plato vacío, como en las damas, o, mejor, como en el solitario, puesto que no se permite hacer ningún movimiento en diagonal, sólo movimientos paralelos a los lados del cuadrado. Es evidente que tal como están situadas las manzanas no se puede hacer, pero se permite trasladar cualquier manzana a un plato vacío antes de comenzar. Todos los movimientos deben ser saltos, quitándose las manzanas por encima de las cuales se haya saltado.

[1] **El Club Matemático** está formado por los profesores **José Antonio Rupérez Padrón**, del IES de Canarias-Cabrera Pinto (La Laguna), y **Manuel García Déniz**, del IES Tomás de Iriarte (Santa Cruz de Tenerife). jaruperez@gmail.com / mgarciadeniz@gmail.com

Sociedad Canaria *Isaac Newton* de Profesores de Matemáticas

Y preguntábamos: ¿Quieren intentarlo nuestros lectores?

Recuerden que primero han de cambiar de sitio una sola de las diez manzanas. Luego, con las reglas del Solitario, eliminar todas las manzanas menos una.

Pedíamos que fabricaran un tablero sobre un trozo de cartón y, utilizando fichas de cualquier juego como piezas, pusieran en marcha sus estrategias para resolver el problema planteado.

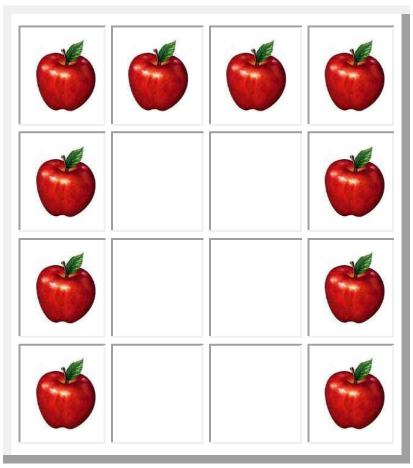
Para encontrar una solución debemos realizar varios intentos al principio con el fin de entender el funcionamiento del juego. Hacer varias pruebas de cambio de posición de una ficha y proceder hasta el final, que debe ser quedarse con una sola pieza en el tablero.

Después hay que ser sistemático. Organizar las pruebas y anotar los resultados.

Primero idear una notación para las jugadas. Puede servir la utilizada en el tablero del Solitario Inglés, con dos coordenadas de fila y columna. Pero al tratarse de un tablero cuadrado sencillo, con pocas posiciones, también podemos numerar correlativamente las casillas del tablero: de 1 a 16.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Las casillas ocupadas son las 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 12, 13 y 16.



Utilizaremos dos números separados por una flecha para indicar cada movimiento.

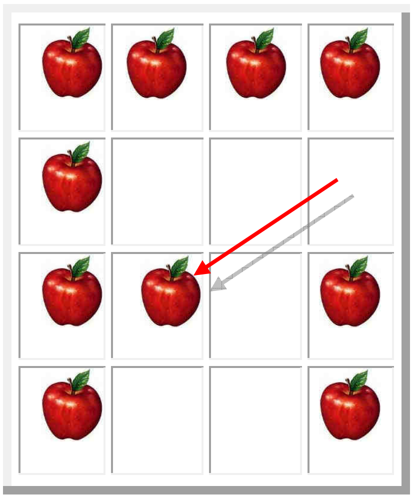
casilla de salida → casilla de llegada

Primero hemos de elegir la manzana que debe cambiar de casilla. Es evidente que sin ese requisito no se puede empezar a jugar porque no hay posibilidad de salto.

Pero tenemos diferentes opciones a elegir. En principio, cualquiera de las doce manzanas puede ser cambiada a cualquiera de las seis posiciones libres (6, 7, 10, 11, 14 y 15). Debe tenerse en cuenta que, al tratarse de un tablero con eje vertical centrado de simetría, habrá posiciones idénticas como en un espejo. Llevar la 5 a la 11 es lo mismo que llevar la 8 a la 10.

Una vez realizado el cambio inicial, debemos realizar movimientos encadenados que conduzcan a la solución. Debemos utilizar las mismas estrategias que se recomendaron al explicar el Solitario Inglés: analizar todas las posibles jugadas, valorar cada una, tomar la decisión de cuál utilizar, no dejar piezas aisladas, utilizar el árbol de decisiones para volver atrás cuando una vía no conduce a la solución. Y para que todo ello sea sistemático y exhaustivo, utilizar algún diagrama apropiado. Una tabla para consignar las jugadas ordenadas y un diagrama de árbol para las diferentes opciones en cada encrucijada. Las jugadas han de ser nueve, una por cada manzana eliminada.

El propio Dudeney da una solución, aunque no asegura que sea única. Ésta, que damos a continuación es la suya: Primero, transferir una manzana de 8 a 10.



Y, luego dar los siguientes saltos, eliminando la manzana sobre la cual se saltó:

9 → 11; 1→ 9; 13 → 5; 16 → 8; 4 → 12; 12 → 10; 3 → 1; 1 → 9; 9 → 11.

Esto, también resuelve el caso simétrico que traslada la primera manzana de 5 a 11.

Pero, ¿habrá más soluciones? Nosotros hemos incorporado este juego al Komando Matemático de la S. C. “Isaac Newton” y hemos constatado que los alumnos eligen este juego sin dificultades y que han encontrado soluciones diferentes.

Una de ellas es la siguiente:

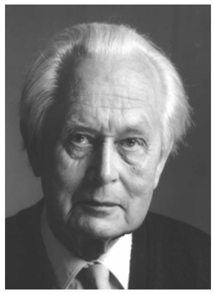
Transferir la manzana de 13 a 11 (sirve también para el traslado de la manzana de 16 a 10) y luego hacer los siguientes movimientos:

12 → 10; 9→ 11; 4 → 12; 2 → 4; 16 → 8; 4 → 12; 12 → 10; 1 → 9; 9 → 11.

¿Hay más soluciones? Desde luego que cualquier cambio de manzana no conduce a solución. ¿Queda alguna por recoger? Ahí está planteado para nuestros lectores.

Y ahora, tal y como habíamos prometido en nuestro tratamiento de las disecciones del cubo, vamos a considerar el tratamiento didáctico del Cubo Soma en un par de artículos. Consideramos que merece la pena. El Cubo Soma es un puzzle muy sencillo de confeccionar y muy barato en cuanto a los costes de material que utilizaremos. Lo importante es tener una buena guía metodológica para su uso, porque los elementos básicos del taller son muy asequibles. Así pues, aquí va la primera entrega.

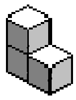
El Cubo Soma



Conocidísimo desde que su inventor, Piet Hein, lo diese a conocer. La anécdota, mil veces repetida, nos dice que Hein asistía a una conferencia sobre física cuántica ofrecida por Werner Heisenberg, cuando su mente creativa le llevó a pensar en la manera de acomodar piezas sencillas formadas por la unión de cubitos elementales para reconstruir un cubo de mayor tamaño.

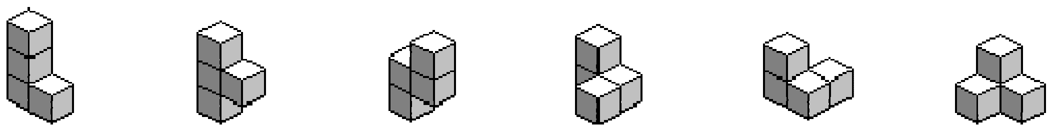
Más tarde concluyó que esas piezas habían de ser los policubos “irregulares” formados por tres y cuatro cubitos. La “irregularidad” consiste en cumplir con la condición de tener ángulos diedros cóncavos.

Sólo hay un tricubo con esas condiciones (la pieza nº 1),.



1

y seis tetracubos (las piezas 2 a 7) donde las piezas 5 y 6 son imágenes especulares una de otra.



2 3 4 5 6 7

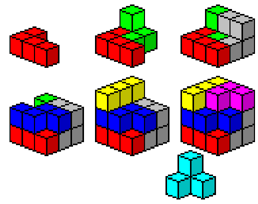
La suma de los cubitos componentes de estas piezas $3 + 6 \times 4 = 3 + 24 = 27 = 3 \times 3 \times 3$, nos permite, pues, reconstruir un cubo con tres cubitos de arista.

El estudio más interesante sobre este juego lo realizaron Guy, Berlekamp y Conway, quienes determinaron la existencia de unas 240 reconstrucciones diferentes del cubo, y un mapa algorítmico que permite pasar de una de ellas a cualquiera de las otras.

La gran popularización del juego, aparte de su comercialización, estuvo en la difusión que de él hizo Martin Gardner en sus artículos divulgativos. Nos hizo ver que también permite este juego una gran creatividad mediante la realización de otras muchas figuras y no sólo del cubo.

El nombre, al parecer, fue tomado de la novela “Un mundo feliz”, de Aldous Huxley, que a su vez lo tomó probablemente de una palabra sánscrita que designa el nombre de una planta euforizante. Probablemente sea así por las características adictivas que este juego tiene sobre los que se entretienen jugando con él.

Una de las muchísimas reconstrucciones del cubo podría ser la mostrada en la figura de la derecha:



Un Taller sobre el Cubo Soma en clase nos daría muchas satisfacciones, tanto a los alumnos como a nosotros.

Nuestros alumnos desarrollan sus intuiciones espaciales hasta conseguir un buen concepto del espacio en tres dimensiones. Practican el proceso de resolución de problemas que les hemos enseñado, respetando sus cuatro fases. Aprenden a utilizar la manipulación de modelos y a usar la estrategia de Ensayo y Error Dirigido. Aprenden conceptos geométricos interesantes en relación con los poliedros y con los movimientos en el espacio. Desarrollan las Competencias Básicas en su totalidad. Mejoran sus capacidades, especialmente la organización, el orden, la sistematicidad y la exhaustividad. Aprenden a utilizar códigos para expresar los problemas y sus soluciones. Mejoran el uso de gráficos y diagramas en el trabajo y en la presentación de los mismos. Y todo ello con agrado, pues están recreando matemáticas de forma lúdica. ¿Qué más queremos?

Analicemos cómo sería un taller de Cubo Soma. En primer lugar, el local es la propia clase; aunque también sirve cualquier otro espacio. El material es muy simple: cubitos para crear las piezas del Soma. Podemos optar, en principio, por tres posibilidades: cubos de madera y pegamento; cubos de plástico encajables; las piezas ya construidas adquiridas en cualquier comercio de juguetería.

El ideal es disponer de cubos de madera, de un tamaño adecuado, en cantidad suficiente para que todos los alumnos dispongan de 27. Con un buen pegamento o cola de madera ya estaríamos en disposición de empezar. Si queremos mejorarlos bastará con aplicarles pintura con posterioridad.

Los cubos encajables son más caros. Pero ya vienen en colores y se pueden reutilizar.

Comprarlos ya hechos es posible dada la cantidad tan grande de elaboraciones artesanas que existen. Es un poco más caro, pero no demasiado. Tal vez sea difícil encontrar la cantidad suficiente con el mismo proveedor, pero no imposible. Y el tamaño que presentan suele ser bastante eficaz.

Puede iniciarse el taller desde el análisis de todos los policubos de tamaño 3 y 4 (tricubos y tetracubos) para elegir y construir los siete que corresponden al diseño del Soma. Si ese trabajo previo ya se hizo, o no se desea hacer, entonces se arranca directamente de la construcción de las piezas.

El siguiente paso consiste en buscar una codificación adecuada para cada una de dichas piezas.

Lo habitual es utilizar un número, tal y como se ve en la ilustración inicial, del 1 al 7 para representarlas. Aunque también se pueden utilizar letras o colores. Así lo hacen Conway y compañía en su “Winning Ways”.

1 = W = White = Blanco

2 = Y = Yellow = Amarillo

3 = G = Green = Verde

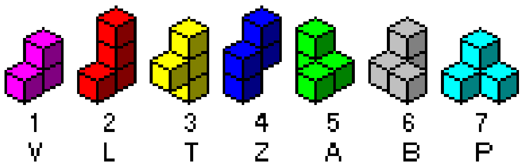
4 = O = Orange = Naranja

5 = L = bLue = Azul

6 = R = Red = Rojo

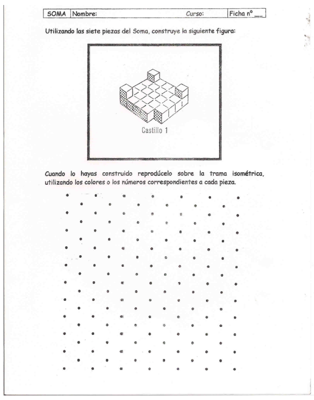
7 = B = Black = Negro

O bien, utilizar cualesquiera otros colores que tengamos disponibles.



Los códigos se utilizarán para trazar mapas de los objetos a construir y sus soluciones correspondientes. Para ello deberán utilizarse: dibujos tridimensionales de la totalidad, dibujos planos por pisos o fórmulas organizadas.

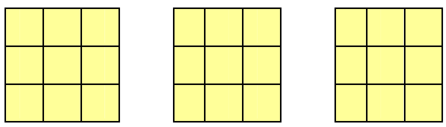
Para el primer caso es necesario utilizar papel con trama isométrica para dibujar bien y con facilidad los distintos problemas y sus soluciones. Sobre el dibujo se señalan con números, letras o colores a qué pieza corresponde cada cubito. El modelo diseñado y utilizado por nosotros es el siguiente:



Claro está que cada profesor hará la ficha que se acomode mejor a su estilo de trabajo y a las características de sus alumnos.

Este trabajo no excluye las otras formas de representación. Aunque son alternativas, es muy interesante complementar siempre el trabajo con las otras representaciones.

La representación plana puede ir en pisos, como si se cortara en rodajas horizontales la figura. Para el cubo, por ejemplo podría ser así:



Piso bajo Piso medio Piso alto

No todas las figuras son fáciles de cortar en pisos o necesitan muchos pisos para su representación. En ese caso se haría por rebanadas verticales. O, en el peor de los casos, combinando ambos.

La notación en "fórmula" sería el equivalente a las anteriores pero sin dibujos, sólo utilizando códigos numéricos o de letras. Para la solución de la "Cama" aparecería algo así:

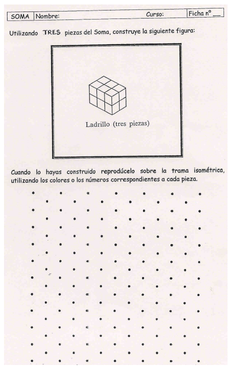
```
/SOMA007

/7.....6/7733366

/5.....1/7443261

/5.....1/5544222
```

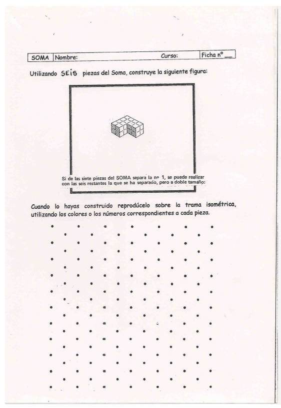
En la fórmula aparecen seis planos, tres rebanadas verticales y dos pisos horizontales. En cada uno aparecen los números del 1 al 7, que son las piezas del Soma implicadas en la construcción de cada uno. La notación inicial es solamente una identificación de la figura que se ha resuelto (número de la ficha).

Ahora hay que disponer de una batería de ejercicios, donde cada uno sea una figura construida con las piezas del Soma. Ya diremos más adelante dónde se pueden encontrar esas construcciones. Cada figura será la parte principal de una ficha, tal y como hemos visto en la que hemos puesto como modelo. En ella aparece representada la figura llamada "Castillo 1". El alumno toma la ficha, toma su Cubo Soma y empieza a trabajar, buscando cómo se deben colocar las siete piezas para que se forme la construcción indicada. Luego, cuando lo haya conseguido deberá dibujar la figura en la trama de la ficha, codificando sobre ella, con números, letras o colores, el orden en que se colocan las piezas. También sería interesante que dibujase un mapa por planos y escribiese una fórmula que se correspondiesen con la misma solución.

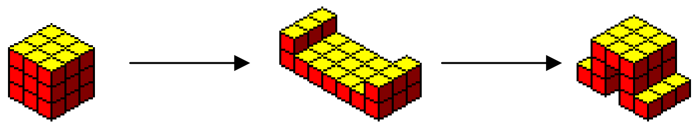
Una vez encontrados los ejercicios y construidas las fichas, deberán clasificarse por orden de dificultad. Los ejercicios más sencillos son aquellos en los que las figuras a construir deben realizarse con sólo algunas de las siete piezas. Le siguen aquellas en las que se deben utilizar todas menos una. Continuarían las que requieren las siete piezas al completo, pero las hay de tipo fácil, de tipo medio y las de tipo difícil. Las fáciles son fundamentalmente las construcciones donde predomina el plano, como es el caso del "Castillo 1". Las muy difíciles son aquellas que requieren el uso de dos juegos de Soma (14 piezas) para su construcción.

Aquí podemos ver dos fichas de tipo sencillo, con tres piezas y con seis piezas respectivamente.

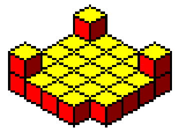




Cuando los alumnos ya son unos expertos y quieren más, se les puede proponer trabajos más complejos como pueden ser: figuras con huecos interiores, donde debe determinar primero el tamaño del hueco y su posible ubicación; figuras cuya parte trasera no está determinada al no verse con claridad; figuras imposibles, cuya imposibilidad debe demostrar; hallar secuencias de construcción que comiencen buscando la solución de una pieza y transformar luego ésta, moviendo el menor número posible de piezas individuales mediante giros y acoples en posición diferente, en una segunda figura dada; o hacer una secuencia de transformación entre tres figuras diferentes; por ejemplo: obtener la figura del “Cubo”, transformarla en “Cama” y, después, en “Túnel”.



Veamos ahora cómo es el proceso metodológico para encontrar la solución a la primera ficha que hemos puesto de ejemplo, el “Castillo 1” de tipo fácil, ya que predomina en ella el plano.

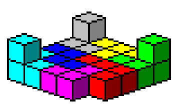


El alumno debe proceder como al resolver un problema. Primero, COMPRENDER. Buscar los datos que son las siete piezas, analizarlas y clasificarlas. La primera conclusión debe ser constatar la existencia de dos tipos de piezas: las 1, 2, 3 y 4 que se pueden colocar en dos posiciones, ocupando un solo piso o, también, dos; las 5, 6 y 7 que siempre deberán colocarse ocupando dos pisos. Analizar bien el objetivo, que es la figura a formar; puesto que es eminentemente plana y sólo destacan los tres torreones de las esquinas, las piezas 5, 6 y 7 deben estar situadas justo allí. La relación siempre es el acople perfecto de las piezas para formar el dibujo.

Hay dos maneras de colocar las piezas 5, 6 y 7 con respecto al hueco de entrada al Castillo. Ensayar una de las formas, luego la otra, hasta encontrar la manera correcta de rellenar el hueco central con las piezas 1, 2, 3 y 4.

Una vez encontrada la solución, realizar consecutivamente las tres representaciones de la misma: tridimensional sobre la trama isométrica, plana sobre un cuadrado de 5x5 y fórmula.

El Castillo 1



```
6 . . . 5     6 3 3 3 5
. . . . .     6 6 3 5 5
. . . . .     4 4 2 2 2
. . . . .     7 4 4 1 2
7 . . .       7 7 1 1
```

Plano en dos pisos:

7	7	4	6	6
7	4	4	6	3
1	4	2	3	3
1	1	2	5	3
	2	2	5	5

Piso bajo

7				6
				5

Piso alto

El trabajo puede ser individual o en pequeños equipos de dos o tres alumnos. Cada solución debe ser presentada por los responsables ante toda la clase para ser sometida a la crítica del resto de los compañeros.

Lo más importante es disponer de una batería organizada de ejercicios. Afortunadamente, eso ya no es ningún problema. En Internet se encuentra multitud de sitios y páginas web seguras que nos dan una enorme cantidad de ejercicios, casi siempre clasificados y con soluciones.

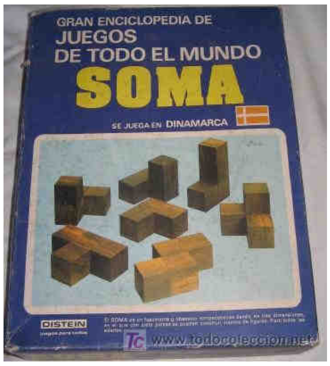
Tres sitios interesantes y muy completos sobre el tema son los siguientes:

http://www.aulamatematica.com/cubosoma/

http://digilander.libero.it/basecinque/labsomac/somahome.htm

http://www.fam-bundgaard.dk/SOMA/FIGURES/FIGURES.HTM

Para aquellos que se interesen por el juego y quieran tener en casa uno bien construido, con buen formato, para jugar en casa e interesar a la familia, recomendamos dos presentaciones comerciales.



La primera y más antigua es una elaboración de DISTEIN, encuadrada en su “Enciclopedia de Juegos de todo el mundo”, en plástico imitando madera, con piezas de gran tamaño y un cuadernillo de instrucciones muy completo.

La segunda, muy actual, es de BINARY ARTS Corp., se denomina “Block by Block”, en plástico, con piezas de tamaño más pequeño y, aparte de las instrucciones, aporta un juego de 60 cartas cada una de las cuales contiene como desafío una figura diferente para construir.

Hay que leer atentamente lo que hemos apuntado. Trabajarlo personalmente, convertirse en un “somadicto”, comprobar las soluciones que hemos dado, resolver los ejercicios que hemos planteado y empezar a planificar un Taller de Cubo Soma con nuestros alumnos para el próximo curso. Por nuestra parte, volveremos sobre el tema en un próximo artículo (quedan aún muchas cosas por ver y comentar) donde daremos las respuestas que faltan y propondremos alguna ampliación.

Y esto es todo por el momento. Habrá, sin duda, una segunda parte del Cubo Soma. Pero también nos esperan otros juegos y puzzles. Ya veremos. Todo dependerá de las respuestas y comentarios, o peticiones, que recibamos de nuestros lectores.

Hasta el próximo NÚMEROS Revista de Didáctica de las Matemáticas pues. Un saludo.

Club Matemático